Time-Dependent Statistics of the Ising Model

鈴木, 増雄

Time-Dependent Statistics of the Ising Model

鈴　木　増　雄（東大理）

（９月２４日　受理）

§1. Introduction

平衡状態の統計力学は、その基礎も確立されており、特にスピン系の平衡状態の問題は厳密に解かれている場合もあり[1]、その他いろいろと研究されている。しかし、非平衡状態の統計力学は、一般には、その基礎は確立されていない。平衡状態からのはずれが小さい linear な範囲では、美事な理論が展開されている。[2] 最近、一般の非平衡状態の統計力学の原理を与えようとする試みがなされている。[3] ここでは、もつとも簡単な Ising Model を取り上げ、系の時間変化が Markoff process に従うという前提の下に、master equation を書き下し、それを reduce して、磁化や correlation function の時間変化を調べてみよう。一次元 model は、Glauber によつて、厳密に解かれている。[4] ここでは、相転移を起す二次元，三次元 model で、特にその転移点近傍に於いて、緩和過程がどうなるかを研究するのを目指して、一般の次元で、基礎方程式を compact に与え、ter Haar[5]，Callen[6] 等によつて得られた static case の correlation function についての方程式との関係を議論し、特に、一次元では、Glauber よりも拡張して、帯磁率　$\chi(q,\omega)$ を厳密に求める。二次元，三次元では、厳密には解けないので、Bethe 近似を拡張して、time-dependent Bethe approximation を提案する。例として、一次元で、その方法を discuss する。

§2. Static case の correlation function

Ising model の Hamiltonian は、

$$\hat{H} = -\mu H \sum_f S_f^z - \frac{1}{2} \Sigma J(f-g) S_f^z S_g^z \tag{1}$$

ここに、S_f^z は、f-site のスピン operator で、$(S_f^z)^2 = 1/4$ に規格化され

ている。Doman と ter Haar は、commutater を用いて定義された二時間 Green 関数$\langle\langle A;B\rangle\rangle$ を使つて、

$$E\langle\langle A;B\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi}<[A,B]_->+\langle\langle[A,\hat{H}]_-;B\rangle\rangle \tag{2}$$

より、Green function の hierarchy equation を compact な型に与え それから、spectral theorem を用いて、correlation function に対する次の式を得た。[5)]

$$\frac{1}{2}<\{n_f\}>=<\{n_f\}S_g^z\coth(\frac{1}{2}\beta E_g)> \tag{3}$$

但し、$n_f=(1-2S_f^z)/2$, $f\neq g$, $\beta=1/kT$,

$$E_g=\mu H+\sum_f J_{gf}S_f^z \quad .$$

Callen は、anti-commutator を用いて定義された二時間 Green function $\langle\langle A;B\rangle\rangle$ を使つて、

$$E\langle\langle A;B\rangle\rangle=\frac{1}{2\pi}<[A,B]_+>+\langle\langle[A,\hat{H}]_-;B\rangle\rangle \tag{4}$$

より、次の式を得た。[6)]

$$<S_g^z\{S_f^z\}>=\frac{1}{2}<\{S_f^z\}\tanh(\frac{1}{2}\beta E_g)> \tag{5}$$

但し、$f\neq g$, $\{S_f^z\}$, $\{n_f\}$ はそれぞれ、g-site 以外の site の S_f^z , n_f の任意の関数を表わす。従つて、(3) , (5)はそれぞれ、無限の連立方程式になつており、全体として、(3)と(5)は、等価であることが容易にわかる。

実は、(5)式を、もつと一般に Spin に拡張する事が出来る。[7)] しかも、次のように、非常に簡単に、Green function の方法を使わずに、一般の classical system について、correlation の公式を導くことが出来る。

今、many component から成る classical system を考えよう。その state variable を S_f (f は lattice state 又は、particle を表わす) としよう。S_f は、e_1 , e_2 , … e_n の n 個の値をとるとする。Hamiltonian を

$$\mathcal{H} = \sum_{f>g\cdots} V(S_f, S_g, \cdots) \tag{6}$$

ここでVは、三体，四体の interaction を含んでもよい。g－site の状態がS_g の時、 g－site と他の site (又は particle) との相互作用の energy を$-E_g(S_g)$ とおく。即ち、

$$E_g(S_g) = -\sum_{f,\cdots} V(S_g, S_f, \cdots) \tag{7}$$

簡単の為に、次のような記号を用いよう。

$$\mathrm{Tr} \equiv \sum_{s_1=e_1}^{e_n} \sum_{s_2=e_1}^{e_n} \cdots \sum_{S_N=e_1}^{e_n} \equiv \sum_{\mathrm{all}\, S_f=e_1}^{e_n},$$

$$\mathrm{Tr}_g \equiv \sum_{S_g=e_1}^{e_n}, \quad \mathrm{Tr}' = \sum_{\mathrm{all}\, S_f=e_1 (f\neq g)},$$

$\{f\} = S_g$ を含まない $\{S_f\}$ の任意の関数

$$Z = \mathrm{Tr}\exp(-\beta\mathcal{H}), \quad \beta = 1/kT .$$

さて、そこで、次の correlation function を考えよう。但し. $\mathcal{H}'$ は、$\mathcal{H}$ の中の S_g を含まない部分を表わす。又、 p＝1，2，3，….

$$\begin{aligned}
\langle\{f\}(S_g)^p\rangle &= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left[e^{-\beta\mathcal{H}'+\beta E_g(S_g)}\{f\}(S_g)^p\}\right] \\
&= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}'\left[e^{-\beta\mathcal{H}'}\{f\}\cdot \mathrm{Tr}_g\{e^{\beta E_g(S_g)}(S_g)^p\}\right] \\
&= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}'\left[e^{-\beta\mathcal{H}'}\{f\}\cdot \mathrm{Tr}_g e^{\beta E_g(S_g)} \cdot \frac{\mathrm{Tr}_g\{(S_g)^p e^{\beta E_g(S_g)}\}}{\mathrm{Tr}_g\, e^{\beta E_g(S_g)}}\right] \\
&= \frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\, e^{-\beta\mathcal{H}}\left[\{f\}\cdot \frac{\mathrm{Tr}_g(S_g)^p e^{\beta E_g(S_g)}}{\mathrm{Tr}_g\, e^{\beta E_g(S_g)}}\right]
\end{aligned}$$

$$\therefore \langle\{f\}(S_g)^p\rangle = \left\langle\{f\}\times\frac{\mathrm{Tr}_g(S_g)^p e^{\beta E_g(S_g)}}{\mathrm{Tr}_g\, e^{\beta E_g(S_g)}}\right\rangle \tag{8}$$

これが、 classical system の correlation に対する一般化された公式である。

例として、スピンSのIsing model の場合には

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{g,f} S_g^z S_f^z$$

より

$$\langle\{f\}(S_g^z)^p\rangle = \langle\{f\} T_S^{(p)}(\beta E_g)\rangle \tag{9}$$

ここで、

$$E_g = \mu H + \sum_f J(g-f) S_f^z \;,$$

$$T_S^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{2S}(k-S)^p e^{xk} \Big/ \sum_{k=0}^{2S} e^{xk} \;, \tag{10}$$

$$T_{1/2}^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{x}{2}\right) \;.$$

(9)式が、Ising model に対するもつとも一般の公式である。$\{f\}=1$ とすれば、Doman の結果が得られる。[8] 更に、$p=1$ とおけば、Praveczki の結果が得られる。[9] そこで、更に Spin $S=1/2$ とおくと、Callen の式(6)となる。このように、(8)式ないし、(9)式は、わざわざ、Green function を用いる程のこともなく、簡単な変形によつて導かれる恒等式である。従つて、それだけでは、なんら、問題の解決には至らず、その利用の仕方が問題である。ここでは、スピン $S=1/2$ の一次元，二次元model について、考えてみよう。higher Spin の場合は、一次元でも、(9)の右辺が複雑になつて、うまくまとまらない。まず、(9)の簡単な応用として、次の問題を議論してみよう。

(i) 磁場の無い一次元model .

$$E_g = J(S_{g-1}^z + S_{g+1}^z) \;;\quad J = J_{g,g+1} \;,\quad K = J/(4kT) \;.$$

故に、

$$\tanh\frac{\beta E_g}{2} = (S_{g-1}^z + S_{g+1}^z)\tanh(2K) \tag{11}$$

そこで、(5)式より、$2a = \tanh(2K)$ として、

$$\langle S_g^z\{S_f^z\}\rangle = a\cdot\langle\{S_f^z\}(S_{g-1}^z + S_{g+1}^z)\rangle$$

特に、$\{S_f^z\} = 1$ とおくと、

$$\langle S_g^z \rangle = a(\langle S_{g-1}^z \rangle + \langle S_{g+1}^z \rangle)$$

uniform とすると、

$$\langle S_g^z \rangle \equiv 0 \qquad (T>0)$$

次に、$\{S_f^z\} = S_f^z$ とおいて、correlation function は、

$$\langle S_f^z S_g^z \rangle = a(\langle S_f^z S_{g-1}^z \rangle + \langle S_f^z S_{g-1}^z \rangle)$$

$$\therefore \quad \langle S_f^z S_g^z \rangle = (\tanh K)^{|f-g|} \tag{12}$$

(ロ) 磁場の有る一次元model。

$$E_g = \mu H + J(S_{g-1}^z + S_{g+1}^z)$$

$$\therefore \quad \tanh\frac{\beta E_g}{2} = \tanh(A + B(S_{g-1}^z + S_{g-1}^z))$$

$$= x + y(S_{g-1}^z + S_{g+1}^z) + z\, S_{g-1}^z \cdot S_{g+1}^z \tag{13}$$

但し、 $A = \beta\mu H/2$, $B = \beta J/2 = 2K$,

$$x = \frac{1}{4}\{\tanh(A+B) + \tanh(A-B)\} + \frac{1}{2}\tanh A$$

$$y = \frac{1}{2}\{\tanh(A+B) - \tanh(A-B)\}$$

$$z = \tan(A+B) + \tanh(A-B) - 2\tanh A \tag{14}$$

特に帯磁率χを求める為に、(13) 式を磁場Hの一次までの範囲で簡単化すると

$$\tanh\frac{\beta E_g}{2} = (S_{g-1}^z + S_{g+1}^z)\tanh B + \frac{A}{2}\{2 - \tanh^2 B - 4(\tanh^2 B)\, S_{g-1}^z\, S_{g+1}^z\} \tag{15}$$

依つて、(5)式より、

$$<S_g^z> = \frac{1}{2}(\tanh B)(<S_{g-1}^z + S_{g+1}^z>) + $$
$$+\frac{A}{4}\{2-\tanh^2 B-<(2S_{g-1}^z)(2S_{g+1}^z)>\tanh^2 B\} \qquad (16)$$

(16) の右辺の $<(2S_{g-1}^z)(2S_{g+1}^z)>$ を磁場の無い時の値$(\tanh K)^2$ で置きかえ、少し変形して、

$$<S_g^z> = \frac{r}{2}(<S_{g-1}^z>+<S_{g+1}^z>) + \frac{A}{2}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2} \qquad (17)$$

但し、$r=\tanh 2K$, $q=\tanh K$.

故に、static な帯磁率 $\chi(0)$は、

$$\chi(0) = \frac{\mu A}{4}\,\frac{1-q^2}{1+q^2} = \frac{\mu^2}{4kT}\exp(2K) \qquad (18)$$

これは、良く知られた結果である。

(iii) 二次元Ising model(isotropic な正方格子)

no field では、容易に次の公式が示されろ。

$$\tanh\frac{\beta E_g}{2} = A\sum_{n.n.} S_l + B\sum_{n.n.} S_l S_m S_n \qquad (19)$$

但し、l , m , n は、g-site の nearest neighbour を表わす。ここで、A , B は

$$A = \frac{(2+\tanh^2 2K)\tanh 2K}{2(1+\tanh^2 2K)} = \frac{1}{4}(\tanh 4K + 2\tanh 2K)$$
$$B = -\frac{2\tanh^3 2K}{1+\tanh^2 2K} = \tan 4K - 2\tanh 2K \qquad (20)$$

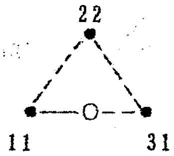
依つて、(5)式より、

$$<\{f\}S_g^z> = \frac{A}{2}\Sigma<\{f\}S_l^z> + \frac{B}{2}\Sigma<\{f\}S_l^z S_m^z S_n^z> \qquad (21)$$

従つて、二体の correlation は、四体と、四体は、二体と四体と六体の correlation とつながり、hierarchy equation になつて、簡単には解

けそうもない。特に、(21) で $\{f\}=1$ とおくと、対称性から容易に、$M_S=\langle S_g^z\rangle$ とおいて、

$$\langle S_{11}^z S_{22}^z S_{31}^z\rangle = \frac{1-2A}{2B} M_S(T) \quad ;$$



故に、三体の correlation は、M_S に対する Yang[10] の解を用いて、$\sigma_{ij}=2S_{ij}$ より

$$\langle \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{31}\rangle = \frac{2-\tanh 4K-2\tanh 2K}{\tanh 4K-2\tanh 2K}\left(1-\frac{1}{\sinh^4 2K}\right)^{\frac{1}{8}}$$

$$=\left\{1-\frac{(\tanh 2K-1)^2}{\tanh^3 2K}\right\}\left(1-\frac{1}{\sinh^4 2K}\right)^{\frac{1}{8}} \tag{22}$$

依つて、T_C 近傍の singularity は

$$\langle \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{31}\rangle \cong (T_C-T)^{\frac{1}{8}} \tag{23}$$

一方、分子場近似では、$\langle\sigma_{11}\rangle\sim(T_C-T)^{\beta}$ として

$$\langle \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{31}\rangle \simeq \langle\sigma_{11}\rangle\langle\sigma_{22}\rangle\langle\sigma_{31}\rangle\sim(T_C-T)^{3\beta}$$

(23) と比較すると、exact solution では、$\langle\sigma\rangle$ と $\langle\sigma\sigma\sigma\rangle$ の singularity は同じ巾を示すから、分子場近似が、T_C 近傍でいかに、悪い近似であるかの例証になる。

§3. time-dependent problem の基礎方程式

さて、一般に、Ising model に Markoff process の仮定を置くと、Master equation を直ちに、書き下すことが出来る。今、分布函数を $P(\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_N,t)$ として、

$$\frac{d}{dt}P(\sigma_1,\cdots,\sigma_N,t) = -\sum_j W_j(\sigma_j)P(\sigma_1,\cdots,\sigma_N,t) + \sum_j W_j(-\sigma_j)P(\sigma_1,\cdots,-\sigma_j,\cdots,\sigma_N,t) \tag{24}$$

j 番目の Spin が σ_j の state をとる確率を $P_j(\sigma_j)$ とすると、特に平衡状態

では、$P_j(\sigma_j)$ と $P_j(-\sigma_j)$ との ratio は、Boltzman factor に比例するから

$$\frac{P_g(-\sigma_g)}{P_g(\sigma_g)} = \frac{\exp[-\beta(\Sigma J_{gf} S_f^z S_g^z + \mu H S_g^z)]}{\exp[\beta(\Sigma J_{gf} S_f^z S_g^z + \mu H S_g^z)]}$$

$$= \frac{1 - \sigma_g \tanh\beta\left(\Sigma \frac{J_{gf}}{4}\sigma_f + \frac{\mu H}{2}\right)}{1 + \sigma_g \tanh\beta\left(\Sigma \frac{J_{gf}}{4}\sigma_f + \frac{\mu H}{2}\right)} \tag{25}$$

一方、$W_j(\sigma_j)$ は、σ_j -state から $(-\sigma_j)$-state に jump する確率を表わす。依つて、detailed balance から、

$$P_j(-\sigma_j)/P_j(\sigma_j) = W_j(\sigma_j)/W_j(-\sigma_j) \tag{26}$$

∴ (25) と (26) より、α を定数として、

$$W_g(\sigma_g) = \frac{\alpha}{2}\left\{1 - \sigma_g \tanh\frac{\beta}{2}\left(\mu H + \Sigma J_{gf}\left(\frac{\sigma_f}{2}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(1 - \sigma_g \tanh\frac{\beta}{2} E_g\right) \tag{27}$$

そこで、correlation function の期待値の運動方程式を作ろう。

$$\langle S_j^z \rangle = \frac{1}{2}\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{2}\sum_{\{\sigma\}} \sigma_j P(\sigma_1, \cdots \sigma_N, t)$$

(24) をもつと compact に書くと、

$$\frac{d}{dt} P(\sigma_1, \cdots, \sigma_N, t) = -\sum_m \sigma_m \sum_{\delta_m'} \sigma_m' W_m(\sigma_m') \times P(\sigma_1, \cdots, \sigma_m' \cdots)$$

この両辺に σ_k をかけて、σ-variable について和をとると、

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_k \rangle = -\sum_{\{\sigma\}} \sum_m \sum_{\{\sigma_m'\}} \sigma_k \sigma_m \sigma_m' W_m(\sigma_m') P(\sigma_1, \cdots, \sigma_m', \cdots)$$

m が、k と異なるところでは、σ_m-variable についての sum より零になつてしまう。故に m＝k のところのみ残る。

$$\therefore \frac{d}{dt}\langle \sigma_k \rangle = -\sum_{\{\iota\}\{\sigma_k'\}} \sigma_k' W_k(\sigma_k') P(\sigma_1, \cdots, \sigma_k', \cdots)$$

さて、

$$\sum_{\{\sigma\}} = \sum_{\{\sigma_k\}} \sum_{\{\sigma\}'} \quad ; \quad \{\sigma\}' = \sigma_k \text{ を含まぬ部分。}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\langle\sigma_k\rangle = -\sum_{\{\sigma_k\}} \sum_{\{\sigma\}'} \sum_{\{\sigma_k'\}} \sigma_k' W_k(\sigma_k') P(\sigma_1,\cdots,\sigma_k',\cdots)$$

右辺の和の中は、σ_k を変数として含まぬから、

$$= -2 \sum_{\{\sigma\}'} \sum_{\{\sigma_k'\}} \sigma_k' W_k(\sigma_k') P(\sigma_1,\cdots,\alpha_k',\cdots)$$

$$= -2 \sum_{\{\sigma\}} \sigma_k W_k(\sigma_k) P(\sigma_1,\cdots,\sigma_N, t)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\langle\sigma_k\rangle = -2\langle\sigma_k W_k(\sigma_k)\rangle \tag{28}$$

そこで、(27) 式を用いると、

$$\frac{d}{d\alpha t}\langle S_g^z\rangle = -\{\langle S_g^z\rangle - \frac{1}{2}\langle \tanh\frac{\beta E_g}{2}\rangle \tag{29}$$

これは何次元でも、どんな結晶構造でも、nearest neighbour だけでなくともよい。もつと一般に、n 本の correlation function の運動方程式も同様にして求めることが出来る。

$$\{f\}_n = \prod_{k=1}^{n} S_{f_k}^z \quad , \qquad \{f\}_n^{(i)} = S_{f_1}^z \cdots S_{f_{i-1}}^z S_{f_{i+1}}^z \cdots S_{f_n}^z$$

とおくと、

$$\frac{d}{d\alpha t}\langle\{f\}_n\rangle = -\sum_{i=1}^{n}[\langle\{f\}_n\rangle - \frac{1}{2}\langle\{f\}_n^{(i)}\tanh\frac{\beta E_{f_i}}{2}\rangle] \tag{30}$$

$$\because) \quad \frac{d}{dt}\langle\{f\}_n\rangle = -2\langle\{f\}_n[\sum_{i=1}^{n} W_{f_i}(\sigma_{f_i})]\rangle$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n}\langle\{f\}_n[1-\sigma_{f_i}\tanh\frac{\beta}{2}E_{f_i}]\rangle$$

依つて (30) 式が得られる。特に、$\{f\}_n = S_f^z$ とおくと、(29) 式になる。又、$\{f\} = S_f^z S_g^z$ とおくと、

$$\frac{d}{d\alpha t}<S_f^z S_g^z> = -[2<S_f^z S_g^z> - \frac{1}{2}\{<S_g^z \tanh\frac{\beta E_f}{2}>$$
$$+ <S_f^z \tanh\frac{\beta E_g}{2}>\}]$$

更に、spacial に uniform な time-dependent problem ならば、

$$\frac{d}{d(\alpha t)}<S_f S_g^z> = -2[<S_f^z S_g^z> - \frac{1}{2}<S_f^z \tanh\frac{\beta E_g}{2}>] \quad (31)$$

(29)，(30)，(31) 式が、今後の議論の基礎方程式になる。

§ 4． static equation との関係

(29)，(30) 式で、$\frac{d}{dt} \equiv 0$ とおくと、$<S>$，$<S_f^z S_g^z>$ に対する Callen の式が得られる。一般に、(30) で、$\frac{d}{dt} \equiv 0$ として得られる式の全体は Callen の式と等価である。

§ 5． 一次元の $\chi(q,\omega)$ の厳密解

運動方程式は、

$$\frac{d}{d(\alpha t)}<S_g^z> = -\{<S_g^z> - \frac{1}{2}<\tanh\frac{\beta E_g}{2}>\} \quad (32)$$

$$E_g = \mu H_g(t) + J(S_{g-1}^z + S_{g+1}^z)$$

$$H_k(t) = H_0 e^{-i\omega t} \cdot \sum_q e^{-ikq} \quad (33)$$

帯磁率 χ を求める為に、(31) 式を磁場の一次までの範囲で、簡単化すると、(17) 式の変形と同様にして、$M_k(t) \equiv \mu<\sigma_k(t)>$ として、

$$\frac{d}{d(\alpha t)} M_k(t) = -M_k(t) + \frac{1}{2}\gamma(M_{k-1} + M_{k+1}) + \frac{\mu^2 H_k(t)}{kT}\cdot(1-\gamma q) \quad (34)$$

これを、k について、Fourier 変換すると、

$M_q(t) = \frac{1}{2\pi}\int M_k(t) e^{ikq} dk$ として、

$$\frac{d}{d(\alpha t)} M_q(t) = -(1-\gamma\cos q) M_q + \frac{\mu^2 H_0}{kT}(1-\gamma q)\, e^{-i\omega t} \qquad (34)$$

$$\therefore \quad M_q(t) = \frac{\mu^2}{kT}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(1-\gamma\cos q)(t-t')} H_0\, e^{-i\omega t'}\, \alpha dt'$$

故に、帯磁率 $\chi(q,\omega)$ は、

$$\chi(q,\omega) = \frac{\mu^2}{kT}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{\alpha}{\alpha(1-\gamma\cos q)-i\omega} \qquad (36)$$

qの小さいところでは、

$$\chi(q,\omega) \cong \chi(0,0)\cdot\frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha(1-\gamma)+\left(\frac{\alpha\gamma}{2}\right)q^2 - i\omega}$$

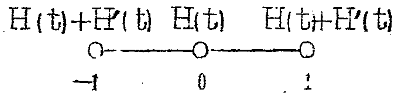
§ 6. time-dependent Bethe approximation

有限温度で相転移を起すmodel で、time-dependent problem を議論しようとすると、二次元，三次元の場合を扱うことになり、運動方程式が互にcouple して、一般に厳密には解けない。そこで、一つの近似的解法として、static な Bethe 近似を拡張して、time-dependent な Bethe 近似を考えてみよう。ここでは、方法に興味があるので、わざと、もつとも簡単な一次元Ising model で議論してみよう。方針としては、一般に、一つのスピン σ_0 に着目して、それとそのnearest neighbour のスピン $\{\sigma_i\}$ とから成るcluster を考え、cluster 内のinteraction は厳密にとり入れ、cluster 外のスピンが、$\{\sigma_i\}$ に与える影響は、time-dependent な分子場 $H(t)$ として取り扱う。Spacial に uniform な問題では、この分子場 $H'(t)$ を決めるのに、self-consistent な条件 $\langle\sigma_0\rangle(t) = \langle\sigma_i\rangle(t)$ を用いることが出来る。更に、cluster 内についてのあらゆる組み合せの correlation について、運動方程式 (30) を作る。これは、有限個の連立微分方程式（一般に non-linear !）になるから、原理的には、解ける。特に、Curie 点より上側では磁場の一次までの範囲では、全体が、linear な連立微分方程式になつて、必ず解ける。さて、例として、一次元model で具体的に議論してみると、磁場の一次の範囲では、transition probability として、(27) の代りに、

Glauber と同じく、

$$W_j' = W_j (1 - \sigma_j \tanh(\mu H / kT))$$

を用いても結果は同じになるから、簡単の為にこれを用いよう。



$$h = \beta \mu H(t) \quad ,$$

$$h' = \beta \mu H'(t) \quad ,$$

$$\bar{h} = h + h$$

磁場の一次までの範囲で、correlation の運動方程式を作ると、結果は次のようになる。

$$-\frac{d}{d\alpha t}\langle\sigma_0\rangle = \langle\sigma_0\rangle - \frac{r}{2}(\langle\sigma_1\rangle + \langle\sigma_{-1}\rangle) - h + \frac{hr}{2}(\langle\sigma_0\sigma_1\rangle + \langle\sigma_0\sigma_{-1}\rangle) \tag{37}$$

$$-\frac{d}{d\alpha t}\langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_1\rangle - q\langle\sigma_0\rangle - \bar{h} + q\bar{h}\langle\sigma_0\sigma_1\rangle \tag{38}$$

$$-\frac{d}{d\alpha t}\langle\sigma_0\sigma_1\rangle = 2\langle\sigma_0\sigma_1\rangle - \frac{r}{2}(1 + \langle\sigma_1\sigma_{-1}\rangle) - h\langle\sigma_1\rangle$$

$$+ \frac{hr}{2}(\langle\sigma_0\rangle + \langle\sigma_0\sigma_1\sigma_{-1}\rangle) - q - \bar{h}\langle\sigma_0\rangle + q\bar{h}\langle\sigma_1\rangle \tag{39}$$

$$-\frac{d}{d\alpha t}\langle\sigma_{-1}\sigma_1\rangle = 2[\langle\sigma_{-1}\sigma_1\rangle - q\langle\sigma_0\sigma_1\rangle - \bar{h}\langle\sigma_0\rangle + q\bar{h}\langle\sigma_1\rangle] \tag{40}$$

$$-\frac{d}{d\alpha t}\langle\sigma_0\sigma_1\sigma_{-1}\rangle = 3\langle\sigma_0\sigma_1\sigma_{-1}\rangle - (r + 2q)\langle\sigma_1\rangle$$

$$+ (hr - 2\bar{h})\langle\sigma_0\sigma_1\rangle + (2q\bar{h} - h)\langle\sigma_{-1}\sigma_1\rangle \tag{41}$$

更に、self-consistent な条件 $\langle\sigma_0\rangle = \langle\sigma_1\rangle$ より、(36) と (37) を用いて、

$$\bar{h} = \frac{(r - q)\langle\sigma_1\rangle + h(1 - r\langle\sigma_0\sigma_1\rangle)}{1 - q\langle\sigma_0\sigma_1\rangle} \tag{42}$$

H の一次の範囲では、上式で、$\langle\sigma_0\sigma_1\rangle \Longrightarrow \langle\sigma_0\sigma_1\rangle_0 = q$ と置いてよいから、分子場 $h'(t)$ は、

$$h'(t) = (\gamma - q)\,(\langle\sigma_1\rangle - hq)/(1-q^2) \tag{43}$$

一方、(36) より、

$$-\frac{d}{d\alpha t}\langle\sigma_0\rangle = \langle\sigma_0\rangle - \gamma\langle\sigma_0\rangle - h(1-\gamma q)$$

これは、前の(33) 式と一致する。一次元では、Bethe 近似は、exact な解を与える。これを用いると、分子場 $H'(t)$は、外場を$H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$として

$$H'(t) = \frac{\gamma - q}{1-q^2}\left\{\frac{1-q^2}{1+q^2}\,\frac{\alpha}{\alpha(1-\gamma)-i\omega} - q\right\} H_0 e^{i\omega t} \tag{44}$$

これは、complex number であつて、もし、real で欲しければ、$H(t) = H_0\cos\omega t$として、

$$H'(t) = \frac{q}{1+q^2}\left[\frac{1-q^2}{1+q^2}\,\frac{\alpha}{\alpha^2(1-\gamma)^2+\omega^2}\left\{\alpha(1-\gamma)\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right\} - q\right] H_0 \tag{45}$$

これをみると、外場 H_0 と分子場 $H'(t)$は、phase がずれている。これは、スピンが外場に response して、その方向を向くのに時間がかかる事に対応している。同様に、$\langle\sigma_0\sigma_1\rangle(t)$，$\langle\sigma_1\sigma_{-1}\rangle(t)$，$\langle\sigma_1\sigma_0\sigma_{-1}\rangle(t)$ も、(38)，(39)，(40) 式を用いて、求める事が出来るが、ここでは省略しよう。

二次元，三次元 model にも、以上の方法を全く同様にして、適用することが出来る。一般に Curie 点 T_C の近傍では、例えば帯磁率は次のような型に求まる。高温側と低温側で、

$$\chi_{\pm}(\omega) = \frac{\Delta_1^{\pm}(\omega)}{A_{\pm}(T-T_C) + \Delta_2^{\pm}(\omega)} \tag{46}$$

但し、$\Delta_2^{\pm}(0) = 0$，$\Delta_2^{\pm}(\omega)$，$\Delta_1^{\pm}(\omega)$ は ω の多項式。

ここで、勿論、time-dependent Bethe 近似には適用範囲があつて、あまり大きな ω に対しては、近似が悪くなる。恐らく thermal な fluctuation の frequency ω_t より、ω が小さい範囲では、良い近似になるものと思われる。

最後に、この time-dependent problem を suggest して下さり、有意義な discussion をして下さつた久保先生に感謝致します。

References

1) L. Onsger : Phys. Rev. 65 (1944) 117.
2) R. Kubo : J. Phys. Soc. Japan 12 (1957) 570.
3) R. Kikuchi : Ann. Physics 10 (1960) 127, Phys. Rev. 124 (1961) 1682.
4) R.J. Glauber : J. Math. Phys. 4 (1963) 294.
5) B.G.S. Doman and D. ter Haar : Physics Letters 2 (1962) 15.
6) H.B. Callen : Physics Letters 4 (1963) 161.
7) M. Suzuki : (to be published in Physics Letters).
8) B.G.S. Doman : Physics Letters 4 (1963) 156.
9) E. Praveczki : Physics Letters 17 (1965) 267.
10) C.N. Yang : Phys. Rev. 85 (1952) ,808.